Introduction à la Prétopologie et ses applications

Présentation générale

Qu'est ce que la prétopologie ? La *Prétopologie* est une théorie mathématique pour l'analyse, la modélisation et la construction dans les domaines les plus variés : modélisation pour les sciences humaines et sociales, application en théorie des jeux, extension de la notion de graphe, modèles de réseaux complexes, agrégation des préférences, ou plus généralement mathématisation des espaces discrets.

Topologie et prétopologie. La théorie mathématique ayant pour objet la modélisation du concept de *proximité* est la topologie. De ce domaine relèvent les concepts classiques : de *continuité* – qui formalise le transport entre ensembles d'une structure topologique ; de *compacité* – qui, combinée avec la notion de continuité permet de résoudre des problèmes d'existence de points particuliers tels que point fixe ou optimum ; de *connexité* – qui permet de modéliser le concept « d'homogénéité » d'une partie d'un ensemble donné. En fait, dans de nombreuses situations pratiques, les utilisateurs se restreignent, dans leurs modèles, à l'utilisation de structures métriques, moins générales mais plus commodes à manipuler. Mais les exigences axiomatiques de la topologie – et a fortiori de la métrique – sont telles qu'elles sont souvent peu compatibles avec les réalités du domaine dont on cherche à modéliser le concept de proximité. D'où l'idée d'envisager la construction d'une théorie ayant une axiomatique moins contraignante que celle de la topologie : c'est ce que propose la *Prétopologie*.

On peut montrer alors que, avec une axiomatique très restreinte par rapport à celle de la topologie, et donc plus apte à modéliser des situations de terrain, on peut généraliser en prétopologie les concepts de base de la topologie (adhérence et intérieur, fermeture et ouverture, voisinage, continuité, compacité, connexité, produits d'espaces). Appliquée au cas des espaces métriques, cela permet de construire des structures dites « quasipseudométriques » qui peuvent se dispenser des contraintes de symétrie ou d'inégalité triangulaire.

Les applications. Parmi les perspectives d'application offertes par la prétopologie on peut citer : la théorie des graphes, avec comme corollaire un bon outil de gestion des concepts de «proximité» induits par une relation binaire, ou une relation valuée et un certain nombre d'applications dans le domaine de la formation de groupes sociaux ; certains aspects de la théorie des jeux tels ceux qui portent sur le problème de la formation des coalitions ; des méthodes de classification utilisables sur des ensembles dotés, non pas de structure métrique, mais simplement dotés de structure prétopologique ; le concept «d'espace préférencié» qui permet reformuler et généraliser des résultats obtenus avec des préférences qui sont au moins des préordres ; ou encore tout simplement la possibilité de munir des ensembles finis sur lesquels il n'est pas possible de construire une métrique traditionnelle de structures « de proximité » autre que celles fournies par des topologies triviales.

D'autres applications, étendant les concepts proposés par la prétopologie, permettent d'aborder la modélisation de systèmes complexes en Sciences Humaines et Sociales, avec, par exemple, des problématiques santé et environnement, de proposer des solutions originales pour la fouille de données ou encore des outils de modélisation pour la biologie de l'évolution.

Les appports de l'informatique. Jusqu'à présent, les difficultés à gérer des ensembles munis d'un nombre élevé fini d'objets a été un frein à l'utilisation pratique de l'outil prétopologique. Mais le développement des moyens de calcul combiné avec la construction d'algorithmes adaptés rend désormais réalisables des applications à des problèmes concrets. En particulier, les algorithmes usuels relevant de la théorie des graphes, tel les algorithmes de calcul d'une fermeture transitive ou des fermés minimaux, servent de base à la mise au point d'algorithmes prétopologiques : on montre notamment que l'algorithme de calcul de la fermeture prétopologique d'un ensemble de sommets dans un graphe peut être construit à partir d'algorithmes de fermeture transitive. De la même manière, sur un graphe valué, on peut procéder à une analyse de type «topologique» en construisant à priori une quasipseudométrique à partir des valuations du graphe.

La prétopologie permet le développement de technologies intéressantes pour une raison essentielle : sa souplesse pour assurer le suivi, pas à pas, de processus de description et de transformation d'un ensemble. Ceci correspond très bien aux concepts de l'informatique pour la modélisation et la simulation de phénomènes complexes. Des développements informatiques innovants, notamment la librairie PRETOPOLIB, permettent désormais de manipuler aisément les concepts de la prétopologie et de réaliser des applications en mesure de traiter des collections de données de grande taille, proposant ainsi un outil pédagogique mais également son usage pour la simulation et le prototypage d'applications pour le chercheur.

De fait, la prétopologie s'avère un outil performant de modélisation du concept de proximité (en ne se focalisant pas sur une distance) qui permet de structurer un espace tout en suivant la dynamique de la structuration, pas à pas, à l'inverse de la topologie. Les récents développements informatiques la rendent maintenant totalement opérationnelle.

Objectifs d'apprentissage

Le programme de ce cours permet

- ▷ d'acquérir des connaissances théoriques sur la prétopologie, un outil puissant de modélisation du concept de proximité
- ▷ de maîtriser les techniques de simulation associées à l'emploi de la bibliothèque logicielle PRETOPOLIB ;
- ▷ de pouvoir conduire une expérience de modélisation et simulation de systèmes complexes.

Au terme de ce cours, l'étudiant aura acquis la maîtrise des concepts de base de la prétopologie requis pour :

- ▷ posséder des connaissances théoriques sur le concept de proximité utiles pour la modélisation des systèmes complexes ;
- ▷ maîtriser les techniques de simulation associées ;
- ▷ maîtriser l'outil logiciel PRETOPOLIB.

Pré-requis (optionnels)

- ▷ Topologie, Théorie de la mesure, Probabilités, Statistiques
- ▷ Théorie des graphes, Algorithmique et structures de données
- ▷ Programmation orientée objet, Techniques de simulation, langage de programmation Java
- ▷ Informatique distribuée, systèmes multi-agents

Le cours comporte des parties théoriques qui s'entrelaceront avec la présentation d'applications de la prétopologie à des domaines variés.

Parties théoriques

- ▷ Rappels et concepts de base
- ▷ Prétopologie et théorie des graphes
- ▷ Connexité et séparabilité
- ▷ introduction à la PRETOPOLIB

Applications

- ▷ Structuration dans les espaces abstraits
- ▷ Image
- ▷ Classification
- ▷ Modélisation en biologie, évolution génétique
- ▷ Modélisation de phénomènes dynamiques complexes (pollution aérienne)

Plan du cours

1 Bases et concepts fondamentaux

La prétopologie est une théorie mathématique pour l'analyse et la modélisation dans les domaines les plus variés relevant de la science des systèmes complexes. En *Prétopologie*, des outils mathématiques (continuité, compacité, connexités, éléments structurants, etc.) deviennent opérationnels et l'objectif de cette journée est d'étudier leur application à la modélisation et simulation des systèmes complexes. La *Prétopologie* permet notamment d'élaborer des outils puissants et d'assurer le suivi pas à pas du développement d'un processus de dilatation, d'adhérence, de fermeture, d'acceptabilité...

Thèmes du cours

- ▷ introduction à la prétopologie (présentation générale centrée sur les applications)
  puis retour à une présentation plus formelle
- ▷ notions de base : préfiltre, pré-idéal, dual, adhérence, intérieur, fermé, ouvert, fermeture... familles de parties, prétopologie, famille de voisinage d'un point
- ▷ espaces prétopologiques de type général, de types $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_D$, $\mathcal{V}_S$, topologie et comparaison des espaces prétopologiques
- ▷ construction d'une adhérence
- ▷ compacité, espaces produits,

2 Prétopologie, Théorie des graphes, Connexité

Nous montrons dans ce cours que la théorie des graphes n'est en fait qu'un cas particulier de la prétopologie ou inversement que la prétopologie est une généralisation de la théorie des graphes. Ce cas particulier consiste à choisir une adhérence construite grâce à des relations binaires réflexives, de ne prendre en compte que des singletons et non pas des ensembles.

La prétopologie généralise tous les concepts propres à la théorie des graphes afin de pouvoir les appliquer sur des ensembles et de faire abstraction (notamment visuelle) des liens qui relie les sommets entre eux. Cette abstraction va permettre de pouvoir prendre en compte de nouvelles caractéristiques suivant le type d'adhérence choisie.

Thèmes du cours

- ▷ Une extension de la théorie des graphes
- ▷ χ-connexités, séparabilité

3 La librairie PRETOPOLIB (avec TP)

Dans ce cours, nous présentons une contribution récente qui prend la forme d'une librairie logicielle implémentant les concepts de la prétopologie. Son intérêt en tant que librairie informatique générique permet d'effectuer des calculs sur des espaces prétopologiques ainsi que leurs visualisations avec toutes les opérations s'y appliquant, amenant par exemple, les bases pour la simulation des réseaux complexes et leur dynamique, ainsi que toute application impliquant la théorie de la prétopologie (théorie des jeux, imagerie, ...). Nous expliquerons quelle est la structure du programme en présentant les grandes classes le composant, puis nous nous pencherons sur le problème des performances, comparant les résultats pratiques aux résultats théoriques. Nous présenterons une série d'exemples illustrant son apport et ses potentialités.

Des travaux pratiques complèteront ce cours.

Thèmes du cours

- ▷ Description de la PRETOPOLIB : motivations et implémentation
- ▷ Structures de données et programmation OO pour la PRETOPOLIB
- ▷ Performances et utilisation de la PRETOPOLIB

4 Structuration dans un espace abstrait avec la prétopologie et applications

Dans ce cours, nous présentons une méthode générale de structuration d'un ensemble E, fini, composé d'éléments reliés entre eux par une liaison quelconque, comme par exemple «*est proche de*», «*est influent sur*», « *est indispensable à*» ... . Le but de cette structuration est de faire ressortir des groupes d'éléments interdépendants ou homogènes.

Pour ce faire, cette méthode fait appel aux notions d'adhérence et de fermés minimaux qui ont été développées en prétopologie. Cette approche est préférée aux concepts classiques de la théorie des espaces métriques et topologiques, jugés souvent trop exigeants pour modéliser des problèmes concrets. L'intérêt, ici, est de pouvoir structurer l'ensemble E à partir des liaisons existantes entre les éléments. Ces liaisons peuvent être une mesure de proximité classique (distance euclidienne, ...), mais aussi une mesure plus générale, appelée quasipseudométrique ne vérifiant pas nécessairement les propriétés de symétrie et d'inégalité triangulaire [, ou encore une relation binaire exprimant une proximité.

Thèmes du cours

- ▷ Structuration des espaces abstraits
- ▷ L'algorithme des fermés minimaux

5 Prétopologie et analyse d'images

Dans cette, seront présentés quelques éléments de traitement prétopologique d'images, et plus particulièrement une généralisation des opérateurs de la morphologie mathématique. Nous étendons les opérateurs d'érosion, de dilatation, d'ouverture et de fermeture à l'aide des opérateurs d'intérieur et d'adhérence prétopologique. Nous illustrerons nos propos à partir d'images binaires et d'images à niveaux de gris. Nous présenterons d'autres applications possibles dans le cadre de la segmentation et la compression d'images.

6 Classification prétopologique

Le problème de la classification peut être posé sous forme d'une interrogation : étant donné un ensemble d'observations dont on connaît une ou plusieurs caractéristiques, comment peut-on les regrouper en un certain nombre de groupes de manière à ce que les groupes obtenus soient constitués d'observations semblables et que les groupes soient les plus différents possible entre eux ?

Il existe de multiples méthodes de partitionnement des données, comme le regroupement hiérarchique, ou l'algorithme des k-moyennes. Nous montrerons également comment il est possible d'utiliser la complexité de Kolmogorov dans un modèle prétopologique afin d'introduire un indice de similarité.

Thèmes du cours

- ▷ La classification et la prétopologie.
- ▷ Algorithme MCPR, MCP,
- ▷ Algorithme MCPR et Kolmogorov
- ▷ L'algorithme de classification par encadrement
- ▷ L'algorithme DEMON

7 Introduction à la prétopologie stochastique

Nous présentons dans ce cours une extension de la prétopologie par le biais d'une application très concrète. Le modèle proposé s'appuie sur deux théories mathématiques : la prétopologie et les ensembles aléatoires. La prétopologie est une extension de la topologie qui permet de suivre pas à pas des processus de transformation. Les concepts de base sont présentés, en insistant sur les aspects constructifs de certains d'entre eux. Cependant, pour certaines applications, telle que la modélisation de phénomènes dynamiques, par exemple la diffusion de pollution atmosphérique, la prétopologie ne suffit pas à modéliser correctement les phénomènes étudiés. Cela provient du fait qu'elle ne prend pas en compte les effets de facteurs non contrôlables. On propose donc de se placer en environnement incertain en introduisant l'aléa par le biais des ensembles aléatoires, généralisation du concept de variables aléatoires. Ces notions sont appliquées à la modélisation de la diffusion de la pollution.

Thèmes du cours

- ▷ Percolation et prétopologie
- ▷ Eléments de prétopologie stochastique
- ▷ Introduction à la multi-estimation